第2講　2次関数

1　関数 $f(x)=a(x-p)^2+q$ について，$y=f(x)$ のグラフをコンピュータのグラフ表示ソフトを用いて表示させる。

このソフトでは，a，p，q の値を入力すると，その値に応じたグラフが表示される。さらに，それぞれの □ の下にある●を左に動かすと値が減少し，右に動かすと値が増加するようになっており，値の変化に応じて関数のグラフが画面上で変化する仕組みになっている。

最初に，a，p，q をある値に定めたところ，図1のように，x 軸の負の部分と2点で交わる下に凸の放物線が表示された。

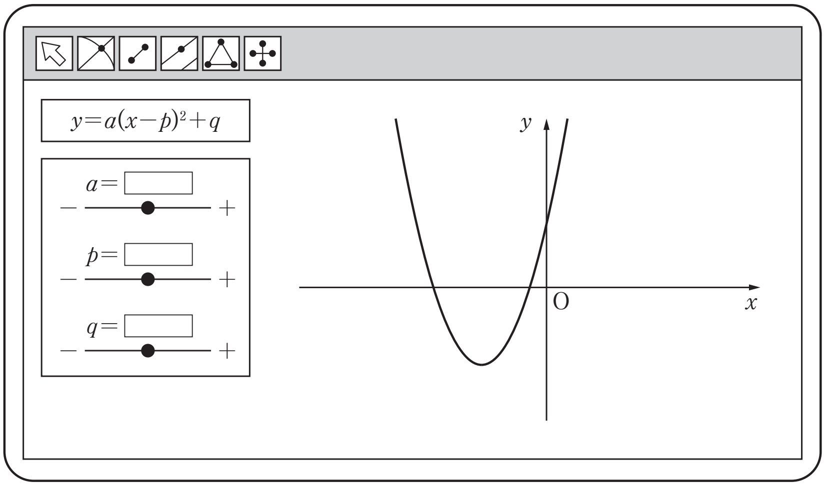


図1

(1)　図1の放物線を表示させる a，p，q の値に対して，方程式 $f(x)=0$ の解について正しく記述したものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。 ア

⓪　方程式 $f(x)=0$ は異なる二つの正の解をもつ。

①　方程式 $f(x)=0$ は異なる二つの負の解をもつ。

②　方程式 $f(x)=0$ は正の解と負の解をもつ。

③　方程式 $f(x)=0$ は重解をもつ。

④　方程式 $f(x)=0$ は実数解をもたない。

(1は次ページに続く。)

(2) 次の操作A，操作P，操作Qのうち，いずれか一つの操作を行い，不等式 $f(x)>0$ の解を考える。

> 操作A：図1の状態から p，q の値は変えず，a の値だけを変化させる。
> 操作P：図1の状態から a，q の値は変えず，p の値だけを変化させる。
> 操作Q：図1の状態から a，p の値は変えず，q の値だけを変化させる。

このとき，操作A，操作P，操作Qのうち，「不等式 $f(x)>0$ の解がすべての実数となること」が起こり得る操作は [イ]。また，「不等式 $f(x)>0$ の解がないこと」が起こり得る操作は [ウ]。

[イ]，[ウ] に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ ない
① 操作Aだけである
② 操作Pだけである
③ 操作Qだけである
④ 操作Aと操作Pだけである
⑤ 操作Aと操作Qだけである
⑥ 操作Pと操作Qだけである
⑦ 操作Aと操作Pと操作Qのすべてである

2　数学の授業で，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ についてコンピュータのグラフ表示ソフトを用いて考察している。

このソフトでは，図1の画面上の [A]，[B]，[C] にそれぞれ係数 a, b, c の値を入力すると，その値に応じたグラフが表示される。さらに，[A]，[B]，[C] それぞれの下にある●を左に動かすと係数の値が減少し，右に動かすと係数の値が増加するようになっており，値の変化に応じて2次関数のグラフが座標平面上を動く仕組みになっている。

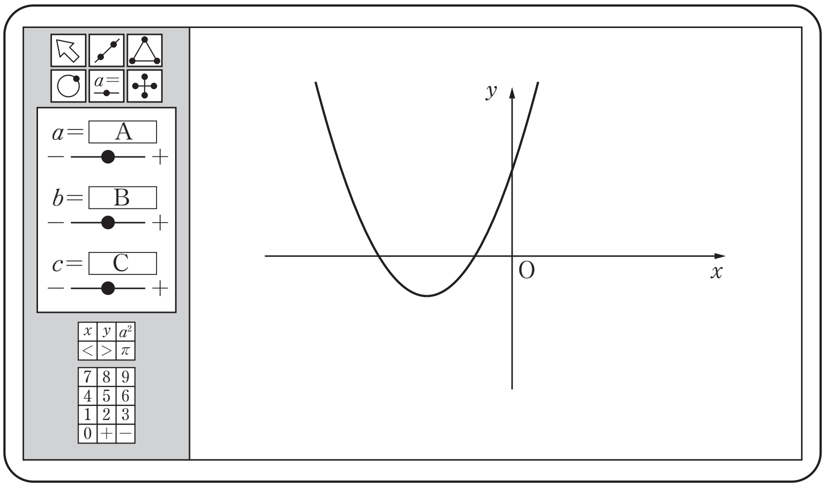
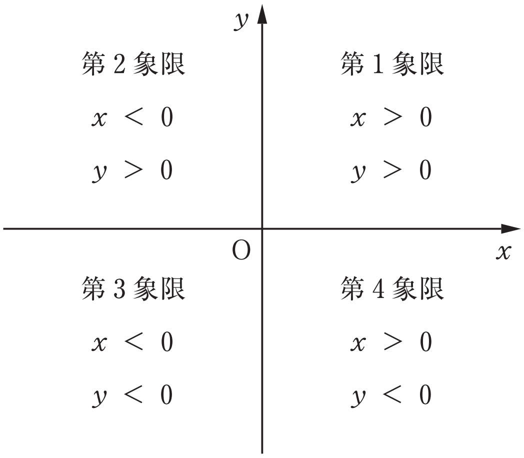


図1

また，座標平面は x 軸，y 軸によって四つの部分に分けられる。これらの各部分を「象限」といい，右の図のように，それぞれを「第1象限」「第2象限」「第3象限」「第4象限」という。ただし，座標軸上の点は，どの象限にも属さないものとする。



このとき，次の問いに答えよ。

(2は次ページに続く。)

(1)　はじめに，図１の画面のように，頂点が第３象限にあるグラフが表示された。このときの a，b，c の値の組合せとして最も適当なものを，次の⓪〜⑤のうちから一つ選べ。 ア

	a	b	c
⓪	2	1	3
①	2	-1	3
②	-2	3	-3
③	$\frac{1}{2}$	3	3
④	$\frac{1}{2}$	-3	3
⑤	$-\frac{1}{2}$	3	-3

(2)　次に，a，b の値を(1)の値のまま変えずに，c の値だけを変化させた。このときの頂点の移動について正しく述べたものを，次の⓪〜③のうちから一つ選べ。

イ

⓪　最初の位置から移動しない。

①　x 軸方向に移動する。

②　y 軸方向に移動する。

③　原点を中心として回転移動する。

(2は次ページに続く。)

(3)　また，b，c の値を(1)の値のまま変えずに，a の値だけをグラフが下に凸の状態を維持するように変化させた。このとき，頂点は，$a=\dfrac{b^2}{4c}$ のときは **ウ** にあり，それ以外のときは **エ** を移動した。ウ，エ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　原点　　①　x 軸上　　②　y 軸上

③　第3象限のみ　　④　第1象限と第3象限

⑤　第2象限と第3象限　　⑥　第3象限と第4象限

⑦　第2象限と第3象限と第4象限　　⑧　すべての象限

(2は次ページに続く。)

(4)　最初の a, b, c の値を変更して，下の図 2 のようなグラフを表示させた。このとき，a, c の値をこのまま変えずに，b の値だけを変化させても，頂点は第 1 象限および第 2 象限には移動しなかった。

その理由を，頂点の y 座標についての不等式を用いて説明せよ。

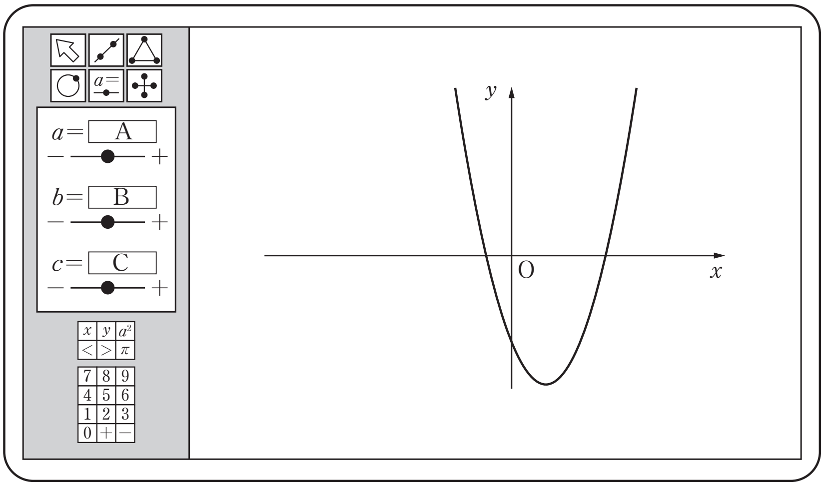


図 2

3　○○高校の生徒会では，文化祭でＴシャツを販売し，その利益をボランティア団体に寄付する企画を考えている。生徒会執行部では，できるだけ利益が多くなる価格を決定するために，次のような手順で考えることにした。

価格決定の手順

(i)　アンケート調査の実施

200 人の生徒に，「Ｔシャツ１枚の価格がいくらまでであればＴシャツを購入してもよいと思うか」について尋ね，500 円，1000 円，1500 円，2000 円の四つの金額から一つを選んでもらう。

(ii)　業者の選定

無地のＴシャツ代とプリント代を合わせた「製作費用」が最も安い業者を選ぶ。

(iii)　Ｔシャツ１枚の価格の決定

価格は「製作費用」と「見込まれる販売数」をもとに決めるが，販売時に釣り銭の処理で手間取らないよう 50 の倍数の金額とする。

下の表１は，アンケート調査の結果である。生徒会執行部では，例えば，価格が 1000 円のときには 1500 円や 2000 円と回答した生徒も１枚購入すると考えて，それぞれの価格に対し，その価格以上の金額を回答した生徒の人数を「累積人数」として表示した。

表１

Ｔシャツ１枚の価格(円)	人数(人)	累積人数(人)
2000	50	50
1500	43	93
1000	61	154
500	46	200

このとき，次の問いに答えよ。

(3は次ページに続く。)

(1)　売上額は

(売上額)＝(T シャツ1枚の価格)×(販売数)

と表せるので，生徒会執行部では，アンケートに回答した 200 人の生徒について，調査結果をもとに，表 1 にない価格の場合についても販売数を予測することにした。そのために，T シャツ 1 枚の価格を x 円，このときの販売数を y 枚とし，x と y の関係を調べることにした。

表 1 の T シャツ 1 枚の価格と［ア］の値の組を $(x,\ y)$ として座標平面上に表すと，その 4 点が直線に沿って分布しているように見えたので，この直線を，T シャツ 1 枚の価格 x と販売数 y の関係を表すグラフとみなすことにした。

このとき，y は x の［イ］であるので，売上額を $S(x)$ とおくと，$S(x)$ は x の［ウ］である。このように考えると，表 1 にない価格の場合についても売上額を予測することができる。

［ア］，［イ］，［ウ］に入るものとして最も適当なものを，次の⓪～⑥のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　人数　　①　累積人数　　②　製作費用　　③　比例

④　反比例　　⑤　1 次関数　　⑥　2 次関数

生徒会執行部が(1)で考えた直線は，表 1 を用いて座標平面上にとった 4 点のうち x の値が最小の点と最大の点を通る直線である。この直線を用いて，次の問いに答えよ。

(2)　売上額 $S(x)$ が最大になる x の値を求めよ。［エオカキ］

(3)　T シャツ 1 枚当たりの「製作費用」が 400 円の業者に 120 枚を依頼することにしたとき，利益が最大になる T シャツ 1 枚の価格を求めよ。

［クケコサ］円

第２講　２次関数

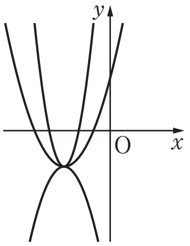
1 (1)　方程式 $f(x)=0$ の解は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標である。

図 1 の放物線は x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わっているので，方程式 $f(x)=0$ は異なる二つの負の解をもつ（①）

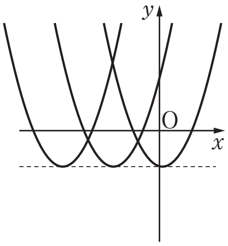
(2)　操作 A により，頂点の位置はそのままに，グラフの開きや凸方向が変わる。

操作 P により，グラフの形と頂点の y 座標は変わらず，頂点の x 座標が変わる。

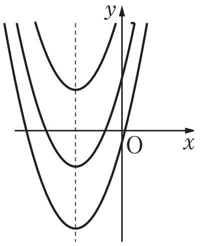
操作 Q により，グラフの形と頂点の x 座標は変わらず，頂点の y 座標が変わる。



操作A



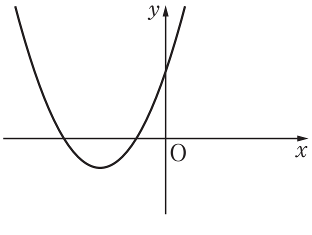
操作P



操作Q

よって，操作 A，P，Q のうち，不等式 $f(x)>0$ の解がすべての実数，すなわち，$y=f(x)$ のグラフが x 軸より常に上にある状態になるのは，操作 Q だけである（③）。また，不等式 $f(x)>0$ の解がない，すなわち $y=f(x)$ のグラフが x 軸より常に下（または x 軸上）にある状態になるのは，操作 A だけである（①）。

2 (1)　図 1 より，グラフは下に凸の放物線であるから



$a>0$ ……①

また，y 切片は正より $c>0$ ……②

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

より，グラフの頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

頂点が第 3 象限にあることから $-\dfrac{b}{2a}<0$ ……③，$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0$ ……④

①，③より $b>0$　　①，④より $b^2-4ac>0$

以上より，$a>0$，$b>0$，$c>0$，$b^2-4ac>0$

これらを満たす a，b，c の組合せは $(a,\ b,\ c)=\left(\frac{1}{2},\ 3,\ 3\right)$（③）

(2) $a=\frac{1}{2}$，$b=3$ のまま，c の値だけを変化させると，頂点の x 座標 $-\frac{b}{2a}$ は変化せず，頂点の y 座標 $-\frac{b^2}{4a}+c=c-\frac{9}{2}$ は変化する。

したがって，頂点は y 軸方向に移動する（②）

(3) $b=3$，$c=3$ のまま，a の値だけを，グラフが下に凸の状態を維持するように，すなわち $a>0$ の範囲内で変化させると，

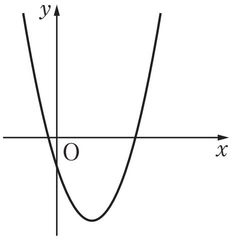
$a=\frac{b^2}{4c}$ つまり $b^2-4ac=0$ のとき，頂点の y 座標が 0 より，頂点は x 軸上にある（①）

$a\fallingdotseq\frac{b^2}{4c}$ つまり $b^2-4ac\fallingdotseq 0$ のとき，頂点は x 軸より上，または下にある。

また，頂点の x 座標は $-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2a}<0$ より，頂点は y 軸より左側にある。

よって，頂点は第 2 象限と第 3 象限を移動する（⑤）

(4) 図 2 より，グラフは下に凸の放物線であるから $a>0$



また，y 切片は負より $c<0$

よって，a，c の値を変えずに b の値だけを変化させると

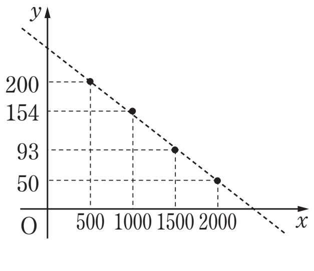
頂点の x 座標 $-\frac{b}{2a}$ は b の符号によって正，0，負のいずれにもなるが，頂点の y 座標 $-\frac{b^2}{4a}+c$ は，$a>0$，$b^2\geqq 0$，$c<0$ より負である。

したがって，頂点が第 1 象限および第 2 象限には移動しない理由は

$a>0$，$c<0$ より，頂点の y 座標について，つねに $-\frac{b^2-4ac}{4a}<0$ となるからである。

3 (1) (売上額)＝(T シャツ 1 枚の価格)×(販売数)……(＊)における「販売数」は，この問題においては累積人数(①)である。

T シャツ 1 枚の価格を x，販売数，すなわち累積人数を y とすると，表 1 の 4 組 $(x,\ y)$ は右図のように傾きが負の直線に沿って分布するように見える。よって，この直線を x と y の関



係を表すグラフとみなすと，y は x の1次関数（⑤）である。

売上額を $S(x)$ とおくと，$S(x)=x\times y=x\times(x$ の1次関数$)$ より，$S(x)$ は x の2次関数(⑥)である。

(2)　表1を座標平面上にとった4点のうち，x の値が最小である点は (500，200)，最大の点は (2000，50)

この2点を通る直線の式の傾きは $\dfrac{50-200}{2000-500}=-\dfrac{1}{10}$

直線の式は $y=-\dfrac{1}{10}(x-500)+200$　　つまり $y=-\dfrac{1}{10}x+250$

このとき $S(x)=x\times\left(-\dfrac{1}{10}x+250\right)=-\dfrac{1}{10}x^2+250x$

$$=-\frac{1}{10}(x-1250)^2+\frac{1250^2}{10}$$

よって，$S(x)$ が最大になる x は $x=1250$ であり，これは50の倍数である。

また，このとき $y=-\dfrac{1}{10}\cdot1250+250=125$

(3)　利益$=S(x)-400\times120$ より，売上額 $S(x)$ が最大になるとき，利益が最大となる。

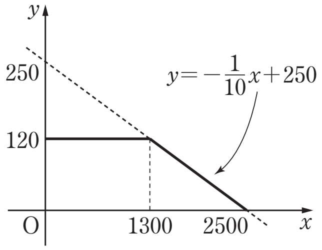
ここで，Tシャツの製作枚数が120枚より，販売数 y の最大が120である。

$y=-\dfrac{1}{10}x+250$ より $y=120$ のとき $x=1300$

したがって，Tシャツ1枚の価格 x について

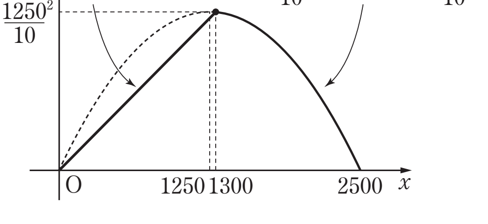
$0\leqq x\leqq1300$ のとき，$y=120$ であり，

$S(x)=xy=x\cdot120=120x$



$1300\leqq x\leqq2500$ のとき，$S(x)=-\dfrac{1}{10}(x-1250)^2+\dfrac{1250^2}{10}$

($x\geqq2500$ のとき，$S(x)=0$)

よって，$S(x)$ のグラフは右図より，$S(x)$ が最大となる x は $x=1300$ であり，これは50の倍数である。

したがって，利益が最大となるTシャツ1枚の価格は1300円